

Szabálytalan alakú égitestek térképi referencia-rendszereinek kidolgozása

Takáts Tünde – Kerkovits Krisztián

DOI: [10.30921/GK.72.2020.2.3](https://doi.org/10.30921/GK.72.2020.2.3)

Absztrakt: Az űreszközök gyors fejlődésének köszönhetően egyre jobban megismerjük a minket körülvevő világot. A kisbolygók és az üstökösök felfedezése során azt tapasztaljuk, hogy ezek alakja nem mindig közelíthető az általunk megszokott gömbformával. Az ilyen szabálytalan alakú égitestekről készült térképeket nehéz áttekinteni, ezért sokszor szoktak a 3D-s modelljükről perspektív ábrákat mellékelni hozzájuk, hogy jobban el tudjuk képzelni, miként is van a valóságban. Ebben a tanulmányban egy érdekes formájú üstökös térképezési lehetőségével foglalkozunk. Bemutatjuk, hogy lehetséges olyan térképet készíteni, amelyről meghatározhatók (koordinátákkal leírhatók) a felszín pontjai, sőt még a vizsgált égitest alakját is szemlélteti.

Abstract: The continuous development of space technology allows us to get to know more and more celestial bodies, which have diverse shapes. Some of them have irregular bodies, which cannot be described by a reference surface like a sphere or an ellipsoid of revolution. In this study, a method is introduced to map irregular objects. This process was tested on the 3D model of the comet 67P/Churyumov–Gerasimenko. For the definition of the reference surface, a central point was obtained, from which all points of the surface are visible. Then, the shape of the comet was approximated by an irregular surface of revolution. Therefore, it was also necessary to determine the ideal place of the axis of rotation. The shifted planetocentric coordinates unambiguously determine the points on the surface of revolution. To minimize the error of this approximation, a modified Downhill Simplex method was utilized. For the mapping of the surface of revolution, an equal-area map projection is developed, which resembles the shape of the comet.

Kulcsszavak: üstökös térképek, szabálytalan formájú égitestek térképezése

Keywords: comet maps, mapping of the celestial bodies with irregular shapes

Bevezetés

Napjainkban a folyamatosan fejlődő űrtechnológiák segítségével egyre több égitestet ismerünk meg, amelyek felszínének vizsgálata a térképezést is magába foglalja. Az újonnan megismert égitestek között változatos formákkal találkozunk. Az amorfi kisbolygó és üstökösök felszíne nem közelíthető jól a szokásos gömb vagy forgási ellipszoid alapfelülettel. Ebben a cikkben ezeknek az égitesteknek a térképezési lehetőségét vizsgáljuk. Célunk egy olyan munkafolyamat kidolgozása, amely tetszőleges amorfi égitestre alkalmazható.

Az általunk kiválasztott égitest, melyen a térképi referenciarendszerek kidolgozását végezzük, a 67P/Csuryumov–Gerasimenko üstökös. Az üstököst 1969-ben fedezte fel Kljím Ivanovics Csuryumov egy űrfelvételén, melyet Svetlana Ivanovna Gerasimenko készített (Guliyev 2019). Az üstökös 2014-ben került a figyelem középpontjába, amikor a Rosetta-program keretében egy egység sikeresen landolt a felszínén. Az üstököst érdekes alakja

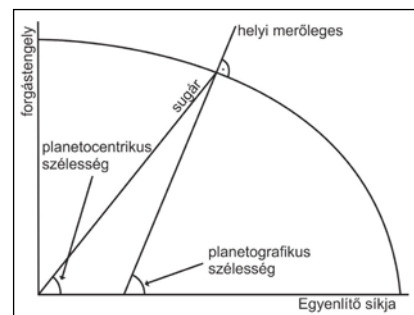
miatt választottuk. Az égitest egy kisebb és egy nagyobb részből áll, melyek méretei $2,6 \times 2,3 \times 1,8$ km és $4,1 \times 3,3 \times 1,8$ km. Az üstökös felszínének áthajlásai miatt nem lehet a pontokat a megszokott planetocentrikus szélességgel és hosszúsággal egyértelműen leírni és a szokásos módon síkba vetíteni (ESA 2020).

Égitest-térképezés korábban

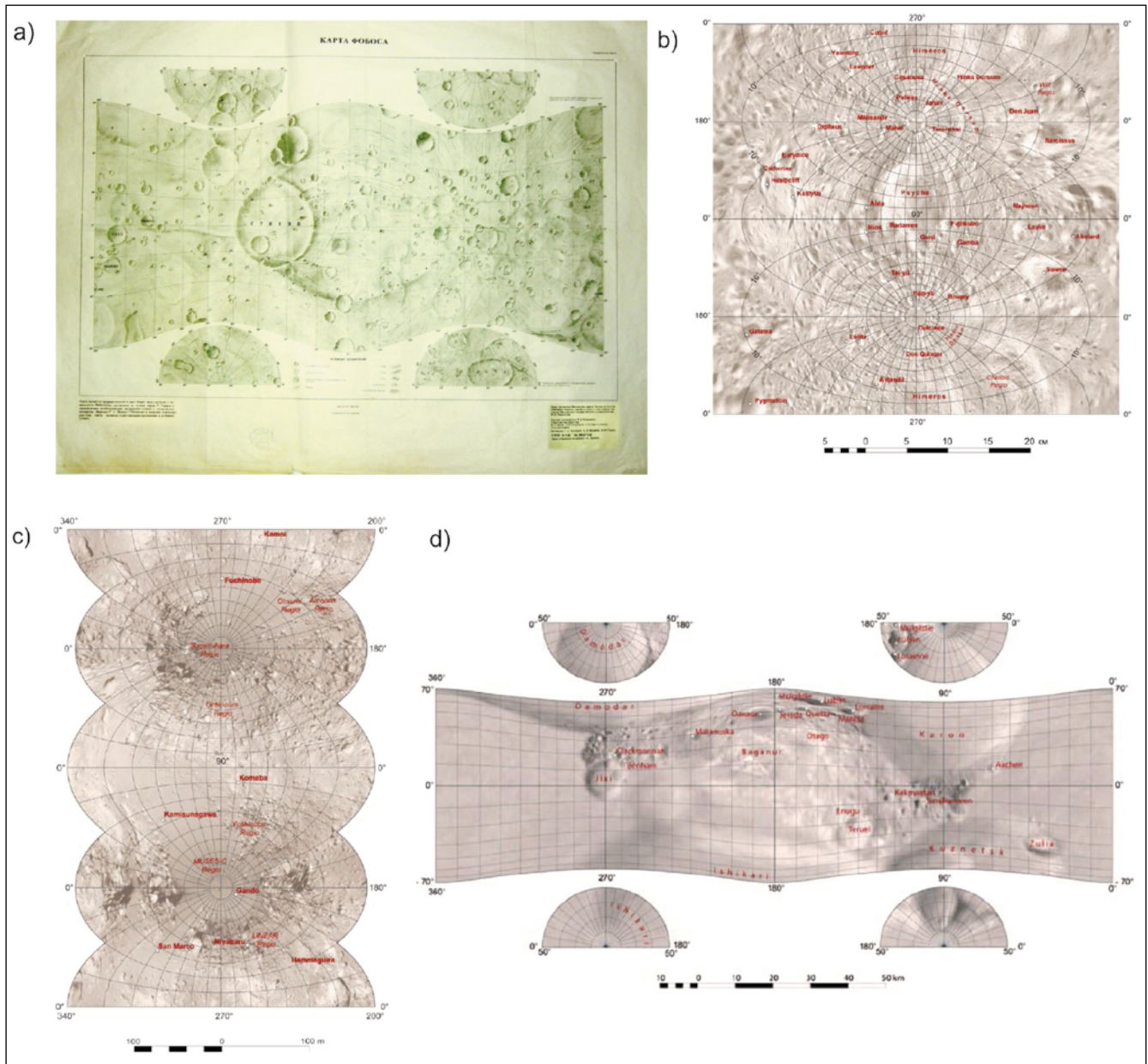
Ahogy a Föld esetében meghatározhatunk geocentrikus és földrajzi koordinátákat, úgy más égitesteken is ezeknek megfelelően léteznek planetocentrikus és planetografikus koordináták (1. ábra). Általában más bolygók felszínének az ábrázolására manapság egyre inkább a planetocentrikus rendszert használjuk (Hargitai et al. 2017), hiszen ez úgy ábrázolja az adott égitestet, mintha egy külső megfigyelő rendszerből néznénk. Ebből a nézetből tudták megfigyelni az egyes bolygók forgását is, és az egyes rendszerekben ettől függően határozták meg a hosszúsági fokok előjelét is.

A kisbolygók és üstökösök térképezésére már az 1980-as évektől kezdve háromtengelyű ellipszoidot használnak alapfelületnek. Az első ilyen közelítést a Mars egyik holdjára, a Phobosra dolgozták ki (Bugajevszkij 1987).

Néhány példa a háromtengelyű ellipszoid alapfelület alkalmazására az elmúlt évtizedekből: Bugajevszkij (1987) egy szögtartó hengervetületet hozott létre a Phobos ábrázolására. Ez a földi Mercator-vetület általánosítása, a pólusok ábrázolására nem alkalmas ezért ott egy meridiánban hossztartó síkvetülettel egészítették ki (Hargitai et al. 2017) (2. ábra). A Phobos mintájára az Erosznak is elkészítették a háromtengelyű ellipszoidra illesztését



1. ábra. Planetocentrikus és planetografikus szélesség meghatározása



2. ábra. Példák a háromtengelyű alappelületű térképekre: a) Phobosz, b) Erosz, c) Itokawa, d) Mathild
A képek forrásai: Bolshakov et al.(1988); Nircov et al. (2014, 2015)

és síkba vetítését. Az Erosz esetében a térképi megjelenítéshez egy meridiánban hossztartó hengervetület készítették (Nircov et al. 2012) (2. b ábra). Az Itokawa aszteroida esetében egy Jacobi-féle szögtartó vetületet alkalmaztak. Ez a vetület analóg a teljes Földre alkalmazott Gauss-Krüger vetülettel (Nircov et al. 2014) (2. c ábra). A Mathild aszteroidára területtartó sík- és hengervetületeket készítettek el. A pólusok ábrázolására használták a sík, az Egyenlítő környékére a hengervetületet (Nircov et al. 2015) (2. d ábra). Az általunk kiválasztott égitest nem közelíthető jól egyetlen háromtengelyű ellipszoiddal. Orosz

kartográfusok kidolgozták ugyan az égitest térképét (Nircov et al. 2018), melyet két elforgatott háromtengelyű ellipszoiddal közelítettek, ráadásul a két ellipszoid közötti átmeneti részt egy külön gömbbel közelítették. Ez a térkép nem ábrázolta egyben az üstökös egészét, hanem a két ellipszoidot külön-külön képezték le. Ezek miatt túl sok szakadás lépett föl, az üstököst 11 külön térképen tudták ábrázolni.

A modellezés lehetőségei

Az alappelület modellezésére azért van szükség, hogy az alakjának egyértelmű matematikai leírást tudjunk

adni. Az általunk vizsgált égitest közelíthető egy általános alakú, sima forgásfelülettel, melynek Z' forgástengelye mint koordinátatengely az X, Y, Z térbeli planetocentrikus koordináta-rendszer egyik tengelyével sem esik egybe. A forgásfelülettel történő közelítés egyszerűbb képleteket eredményez, mint egy általános, zárt, sima felülettel történő közelítés; ráadásul a geodéziából ismert összefüggések (pl. a Clairaut- és a Meusnier-tétel) bármilyen sima forgásfelületen érvényesek maradnak. Egy szabálytalan forgástestet többfajta modellezési lehetőséggel lehet leírni. Számunkra ezek közül egy olyan módszerre van

szükség, ahol egyértelműen meg tudjuk határozni a forgásfelület egy meridiánjának futását valamilyen koordináta-rendszerben.

Merőleges vetítés a forgástengelyre

Ennél a modellezési lehetőségnél egy $r(Z')$ függvénnyel írható le a felület. A függvény meghatározza a Z' forgástengely egy adott pontjában a forgásfelület távolságát a forgástengelytől. (3. ábra) az $r(Z')$ függvényre feltételeket szabhatunk a $\pm Z'_0$ pontban, azaz az égitest két pólusánál:

$$r(Z') = r(-Z'_0) = 0$$

$$\frac{-dr(Z'_0)}{dZ'} = \frac{dr(-Z'_0)}{dZ'} = \infty$$

E feltételeket kielégíti, ha $r(Z')$ az alábbi alakú:

$$r(Z') = \sqrt{(Z' - Z'_0)(Z' + Z'_0)} \cdot p(Z')$$

ahol $p(Z')$ tetszőleges pontossággal közelíthető Taylor-sorfejtéssel:

$$p(Z') \approx \zeta_0 + \zeta_1 \cdot Z' + \zeta_2 \cdot Z'^2 + \dots$$

Nem lehet tetszőleges alakú a test, hiszen egy Z' értékhez egyetlen r érték tartozhat a függvény egyértelmű hozzárendelése miatt (felkiáltójellel jelölt pont a 3. ábrán).

Fourier-sorfejtésen alapuló modellezés

Ez a módszer is alkalmas arra, hogy egy 3D-s forgástest felszínét leírjuk. A felszín leírására egy paraméteres függvényt alkalmazunk (4. a ábra). A $\rho(\beta^*)$ meghatározza a felszín minden pontjának a távolságát a középponttól a β^* planetocentrikus pólustávolság függvényében egy polárkoordináta-rendszerben. Mivel $\rho(\beta^*) = \rho(-\beta^*)$ és $\rho(\beta^* + 2\pi) = \rho(\beta^*)$, ezért a függvényünk

páros és 2π periódusú. Megállapítható továbbá, hogy a

$$0 \leq \int_0^{2\pi} d\beta \leq 2\pi \rho_{\max}^2$$

integrál egy perióduson belül véges, így tehát ρ kifejezhető Fourier-sorfejtéssel:

$$\begin{aligned} \rho(\beta^*) \approx & a_0 + b_1 \cdot \sin \beta^* + \\ & + a_1 \cdot \cos \beta^* + b_2 \cdot \sin(2\beta^*) + \\ & + a_2 \cdot \cos(2\beta^*) + b_3 \cdot \sin(3\beta^*) + \\ & + a_3 \cdot \cos(3\beta^*) + \dots \end{aligned}$$

A szinuszfüggvény nem páros, ezért ezek a tagok kiesnek a sorfejtésből. Így az függvényünk csak koszinuszok együtthatóitól függ.

$$\rho(\beta^*) \approx a_0 + a_1 \cdot \cos \beta^* + a_2 \cdot \cos(2\beta^*) + a_3 \cdot \cos(3\beta^*) + \dots$$

Ez a módszer sem alkalmas minden felület leírására. A nagyon amorf fel színű testek esetében ennek az alkalmazása során azt tapasztaljuk, hogy a középpontból kiinduló vezérsugar több helyen metszheti a felületet (Shen et al. 2009) (4. b ábra).

A felület paraméterezése a meridián ívhosszával

A harmadik módszer adja talán a legjobban vissza a felszín alakját; ebben az esetben a forgásfelületet a meridián ívhosszával paraméterezzük. A meridián futását $r(i)$ és $Z'(i)$ függvényekkel tudjuk leírni (5. ábra). Az $r(i)$ megmutatja az adott i ívhosszhoz tartozó, forgástengelytől mért távolságot, míg a $Z'(i)$ az adott ívhosszhoz tartozó függőleges koordinátát határozza meg. Mivel az i paraméter a pólustól mért görbe távolság, a differenciálgeometriai összefüggések miatt $Z'(i)$ és $r(i)$ deriváltjainak teljesíteni kell a következő egyenletet:

$$\sqrt{\left(\frac{dZ'}{di}\right)^2 + \left(\frac{dr}{di}\right)^2} = 1$$

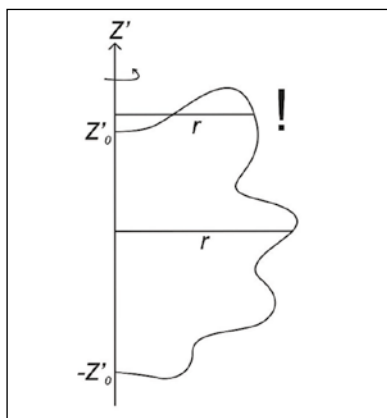
Ilyen függvénpárokat nem lehet egyszerűen fölírni.

Az alapfelület meghatározása

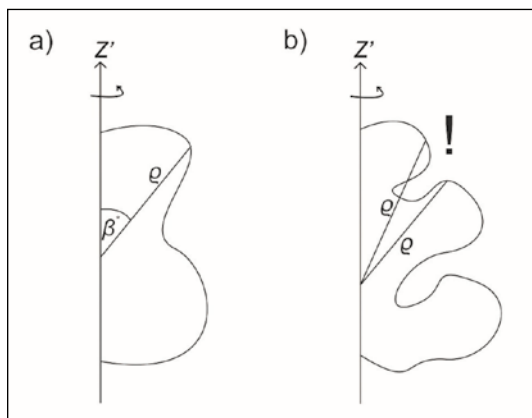
A munkafolyamat során az általunk kiválasztott égitest 3D-s modelljét használtuk fel. A modellt az Európai Űrügynökség (ESA 2019) honlapjáról töltöttük le. A modell kétféle adattípust tartalmaz: az egyik „v” kezdőbetűvel felsorolja az egyes csúcspontoknak az X, Y, Z koordinátáit, a másik „f” kezdőbetűvel olyan számhármakat tartalmaz, amelyek megmutatják az egyes háromszög alakú oldallapokat képező csúcspontok sorszámait.

Először egy olyan középpontot keresünk, ahonnan lehetőség szerint az amorf formájú üstökös felszínének minden pontjára rálátunk. Az első feladatunk ezen középpont és a forgástengely ideális helyzetének meghatározása volt. Az így meghatározott, eltolt planetocentrikus szélesség a lehetőségekhez mérten egyértelműen jellemezni tudja a forgásfelület paralelköreit. A munkafolyamat során a számításokat Python-környezetben végeztük.

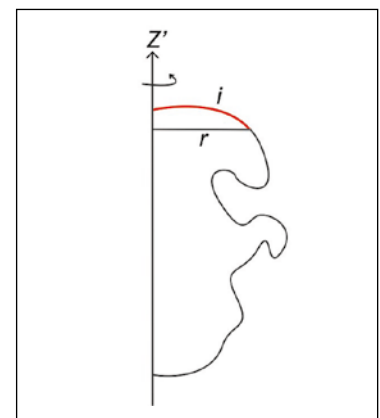
A modellt tartalmazó .obj (Wavefront OBject) fájl beolvasása után az X, Y, Z koordinátákra egy térbeli elforgatási mátrixot (BA mátrix) alkalmaztunk, amely az A és B mátrixok által reprezentált elforgatások egymás utáni alkalmazása. Az elforgatott térbeli derékszögű koordinátákat vesszős X', Y' és Z' betűkkel jelöljük figyelembe véve még egy Z' irányú Z'_t nagyságú eltolást is.



3. ábra. Merőleges vetítés a forgástengelyre



4. ábra. Fourier-sorfejtésen alapuló modellezés
a) paraméterek b) kivételes eset



5. ábra. Egy meridián forgástengelytől való távolsága az ívhossz függvényében.

1. elforgatás:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \lambda_0 & \sin \lambda_0 & 0 \\ -\sin \lambda_0 & \cos \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. elforgatás:

$$B = \begin{pmatrix} \cos \beta_0 & 0 & -\sin \beta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta_0 & 0 & \cos \beta_0 \end{pmatrix}$$

A két elforgatás együtt:

$$BA = \begin{pmatrix} \cos \beta_0 \cos \lambda_0 & \cos \beta_0 \sin \lambda_0 & -\sin \beta_0 \\ -\sin \lambda_0 & \cos \lambda_0 & 0 \\ \sin \beta_0 \cos \lambda_0 & \sin \beta_0 \sin \lambda_0 & \cos \beta_0 \end{pmatrix}$$

Az eredeti X,Y,Z és az elforgatott X', Y', Z' koordináta-rendszer között tehát az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = BA \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z' \end{pmatrix}$$

A forgásfelülettel való közelítésnek hibája is van, hiszen az üstökös valójában nem tökéletes forgástest alakú. Ennek a hibának a vizsgálata és csökkentése céljából a következőket végeztük el: a pontokat szélesség szerint kategóriákba soroltuk. A kategóriába sorolás osztásközeit a program különböző futtatásai során átállítottuk, a következő intervallumszélességeket próbáltuk ki: 1°, 2°, 5°, 10° (1. táblázat). Ha egy test tökéletes forgásfelület, akkor a középpontban vett bármely nyílásszögű kúp egy olyan kört metszi ki, melynek pontjai az eltolt középponttól azonos távolságra vannak. Az ettől vett eltérés a pontok eltolt középpontból vett távolságának szórásnégyzete, melyet minden szélességkategóriában külön-külön kiszámoltunk. Az így meghatározott hibaérték azt is jelzi, ha a kúp több helyen metszi a felületünket. Tapasztalataink szerint az 5 fokos felbontás már elég részletes képet nyújtott.

A forgásfelület modellezésére a Fourier-soros közelítést választottuk. Annak érdekében, hogy a vezérsugár lehetőleg csak egyszer messe a felületet, a vezérsugarak kezdőpontját nem az égitest tömegközéppontjában, hanem a Z' forgástengely mentén eltolva vettük fel. A koordináta-rendszer elforgatási szögei (β_0 , λ_0) mellett az eltolás optimális Z'_t értékét is kerestük.

A hiba minimalizálása céljából a downhill simplex módszer módosított változatát (Kaczmarczyk é. n.) alkalmaztuk (6. ábra). Legmegfelelőbbnek az bizonyult, hogy először az elforgatási és eltolási értékeket optimalizáljuk, az itt kapott eredményeket az

1. táblázat.

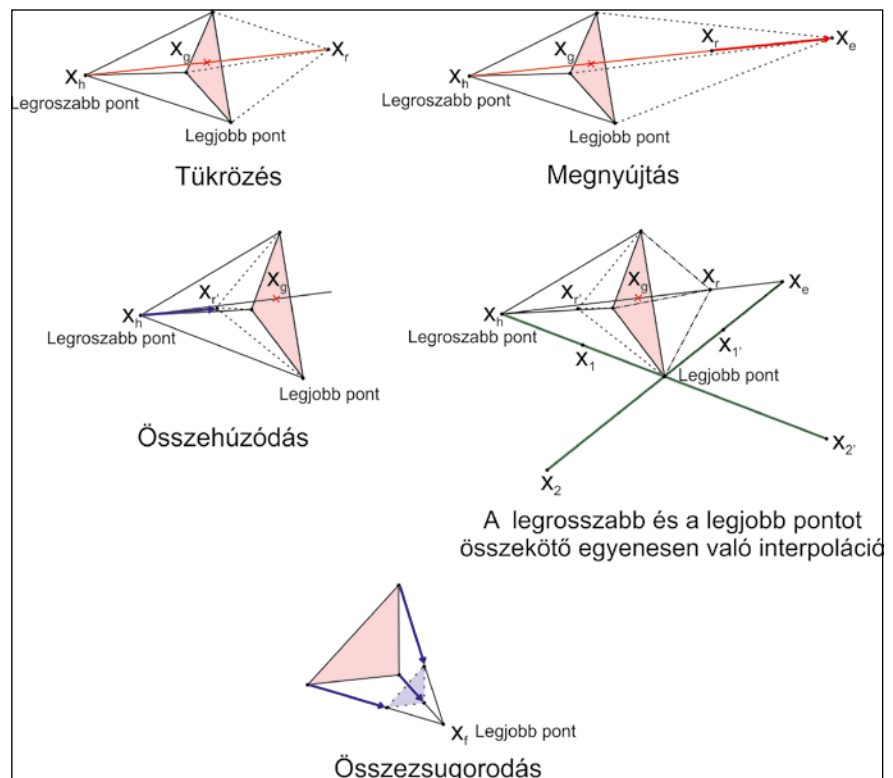
A középpont helyének eltolási adatai radiánban (négy tizedesjegyre kerekítve)

Felbontás (fok)	λ_0 (radián)	β_0 (radián)	Z'_t (km)	Összegzett négyzetes hiba (km ²)
1°	1,4461	-0,3655	0,4434	12,1390
2°	1,4463	-0,3625	0,4303	6,0851
5°	1,4483	-0,3458	0,4357	2,4673
10°	1,4530	-0,3478	0,4564	1,2796

Fourier-soros közelítés együtthatóinak keresése során kezdőértékeknek alkalmaztuk, majd ezt is optimalizáltuk. Ez a heurisztikus eljárás a függvény lokális minimumhelyeit keresi meg (Nelder–Mead 1965).

Amennyiben nem találjuk meg a függvény minimumhelyét a szimplex transzformációk (tükrözés, megnyújtás, összehúzóddás) segítségével, a szimplex a legkisebb pont körül minden irányból összezsugorodik. Ez utóbbi a program lefutása során többször is megtörténhet, de erre oda kell figyelni, mert előfordulhat, hogy ezért nem a minimumhely közelében lesz a szimplex mérete kisebb a kilépési feltételnél. Ebben az esetben téves eredményt is kaphatunk, különösen, ha a szimplex túl sokszor zsugorodik össze. Ennek elkerülése érdekében a módszernek a Kaczmarczyk által kidolgozott módosítását alkalmaztuk.

Ennek lényege, hogy az összezsugorodás elkerülése érdekében további pontokat is kipróbál a legrosszabb és legjobb pontot összekötő egyenes mentén (6. ábra). Különböző kezdőértékekre kipróbálva az eljárást, három lokális minimum-értéket találtunk. Annak érdekében, hogy a program lehetőség szerint globális minimumba találjon, egy kiegészítő függvényt tettünk bele, amely a megtalált lokális minimumot veszi új kezdő értéknek, és ezt használva új eljárásba kezd. Ha a soron következő optimalizálás eredménye hibahatáron belül megegyezik az előző eljárás eredményével, az eljárás kilép, egyébként megint lefut. Ilyenkor a különböző kezdőértékekre kapott eredmények közül a legjobbat választjuk eredményül. Ezzel az eljárás lassabb lett, de megbízhatóbb eredményt kaptunk. Az eredményben megkapott értékek radiánban vannak, és



6. ábra. A módosított downhill simplex lehetséges lépései

adnak egy kezdőértéket az alapfelület leírásához, és megadják, hogy mennyi a segédpólus hosszúsága és pólustávolsága, amelyek egyértelműen meghatározzák az ideális forgástengely irányát. Ezen kívül azt is megkapjuk, hogy a középpont mennyivel tolódik el és milyen irányban. Ezt követően határoztuk meg az alapfelület Fourier-soros közelítésének együtt-hatását ugyanezen módszerrel.

$$\varrho(\beta^*) \approx a_0 + a_1 \cdot \cos \beta^* + a_2 \cdot \cos(2\beta^*) + a_3 \cdot \cos(3\beta^*) + \dots$$

A sorfejtés során keressük azokat az értékeket, amelyeket behelyettesítve egy olyan $\hat{\varrho}$ értéket kapunk, hogy az E átlagos hiba a lehető legkisebb legyen.

$$E = \sqrt{\frac{\sum (\varrho - \hat{\varrho})^2}{n}}$$

ahol a ϱ az üstökös felszínének távolsága az eltolt középponttól, $\hat{\varrho}$ a Fourier-sor által számított vezérsugár és az n a csomópontok száma.

A Fourier-sorfejtés során több együtt-határozást is megvizsgáltunk. Az ideális ebben az esetben nyolc

2. táblázat Fourier-sorfejtés során kapott értékek (a szögértékek radiánban, a távolságértékek kilométerben értendők)

β_0	1,466083671689564
λ_0	-0,30772564761801646
Z'_0	0,17384711818701806
a_1	1,710468611681618
a_2	-0,03012094884439919
a_3	0,38531560422326494
a_4	0,3341331398169681
a_5	-0,11475961687674407
a_6	0,01849124993537946
a_7	-0,1296687215243982
a_8	-0,009696089235291569

együttható volt, utána már nem volt jelentős javulás az eredményben. Az optimalizáció során megengedtük, hogy a downhill szimplex tovább javítson az elforgatási értékeken is, így a 2. táblázatban foglaltakat kaptuk eredményül. Ezen értékek segítségével elkészült az üstökös alapfelülete (7. ábra).

A síkba vetítés folyamata

Az üstökös síkba vetítésére a Mercator-Sanson képzetes hengerve-tületet választottuk. Mivel ezt alapve-tően gömb alapfelülettel szokás defini-álni, szükséges ennek az általánosítása tetszőleges forgásfelületre. Ez a vetület a középpermeridiánban és a paralelkörök mentén hossztartó, valamint terület-tartó is. A paralelkörök képei párhuzamos egyenesek. A gömb alapfelület-tel definiált vetületben a meridiánok képei szinuszi-ívesek, ezt az általánosítás során azonban el kellett enged-nünk. Ez a vetület az általánosítást követően alkalmasnak bizonyult arra, hogy a térkép átvetítésekor, a kapott eredmény utaljon az égitest amorf for-májára. Ez azért szerencsés, mert így a vetület kielégíti az ún. hasonlósági elvet (Klinghammer 2015).

Az általánosítás első lépéseként fogalmazzuk meg a képzetes henger-vetületek általános egyenleteit:

$$X = x(\varphi^*, \lambda^*) \\ Y = y(\varphi^*)$$

ahol φ^* és λ^* az elforgatott és forgás-tengely mentén eltolt középpontból értelmezett planetocentrikus széles-séget és hosszúságot jelölik.

Az általunk meghatározott alapfe-lületnek először a középpermeridiánban

való hossztartását vizsgáltuk. A felü-letet felosztjuk kicsi sávokra, melyek paraméterezésére az r (a paralelkör sugara) és a Z' (a paralelkör síkjának az eltolt középpontjától való távol-sága) változókat használjuk. Az eltolt középpont, r és Z' egy derékszögű háromszöget alkotnak, melynek átfo-gója ϱ

$$Z' = \varrho \cdot \sin \varphi^* \\ r = \varrho \cdot \cos \varphi^*$$

A szélesség kicsiny megváltozá-sához tartozó ívhossz meghatároz-ható a Pitagorasz-tétel segítségével (8. ábra):

$$(\Delta i)^2 = \Delta^2 i = \Delta^2 Z' + \Delta^2 r = \\ = \Delta^2 \varrho \cdot \cos^2 \varphi^* + \varrho^2 \cdot \sin^2 \varphi^* + \Delta^2 \varrho \cdot \sin^2 \varphi^* + \varrho^2 \cdot \cos^2 \varphi^* = \\ = \varrho^2 + \Delta^2 \varrho$$

$$\Delta i = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{\Delta \varrho}{\Delta \varphi}\right)^2}$$

A ϱ a fentebb említett vezérsugár hossza.

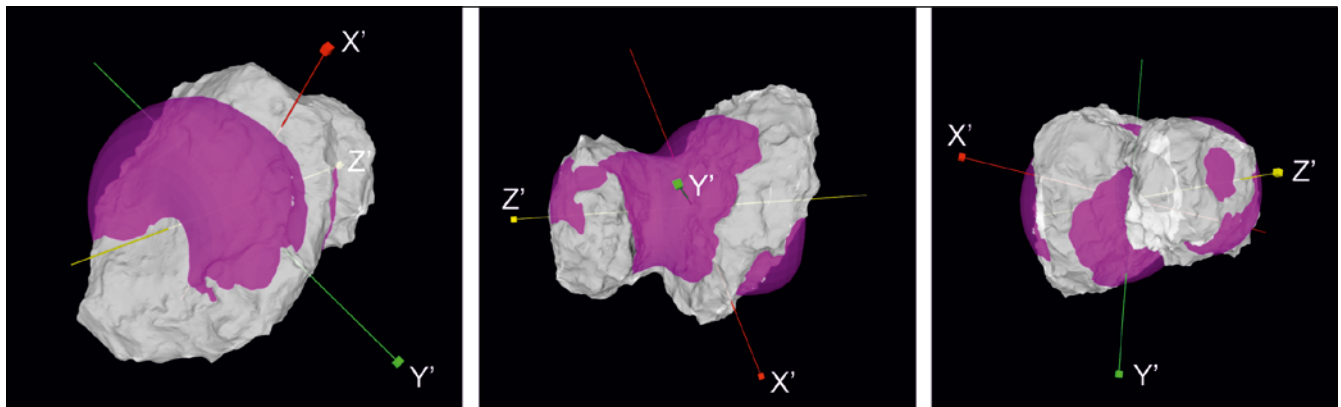
A függőleges koordináta a fenti kis ívhosszak összegzéséből származik, amely a felosztást minden határon túl finomítva a következő integrálba megy át:

$$y = \int_0^{\varphi^*} \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi^*$$

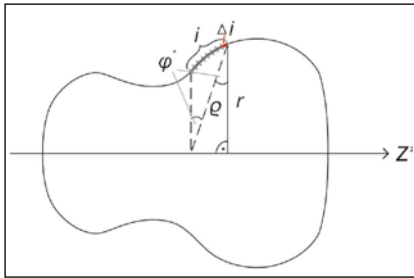
Ezt az integrált nem lehetséges ana-litikus módszerekkel kifejtetni, ezért becsléséhez numerikus módszerek (pl. Gauss-kvadratúra) szükségesek.

A paralelkörök hossztartásának eléréséhez egy picike paralelkör-darabot vettünk, melynek hossza $r\Delta\lambda^*$. A vízszintes x koordináta ezen picike paralelívdarabok összege, amely a fel-osztást minden határon túl finomítva, egy integrálba megy át.

$$x = \int_0^{\lambda^*} r d\lambda^* = \varrho \cdot \cos \varphi^* \cdot \lambda^*$$



7. ábra. Az új alapfelület és az üstökös viszonya



8. ábra. Ívhossz meghatározása

Mercator-Sanson vetületi egyenletei általános forgásfelületre tehát:

$$y' = \int_0^{\varphi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} \cdot d\varphi$$

$$x = r \cdot \lambda^* = \rho \cdot \cos \varphi^* \cdot \lambda^*$$

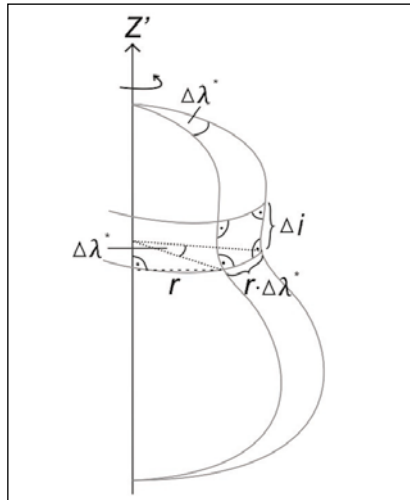
A vetület tulajdonságai közül eredetileg csak a középméridiánban és a paralellkörökben vett hossztartást szerettük volna megőrizni. Végül nem csak ezeket sikerült megtartani, hanem a területtartást is sikerült megőrizni. Ennek bizonyítását egy paralelogramma területének a leképezésével tudjuk elvégezni.

Az eredeti elemi kis foktrapéz területe közelíthető egy elemi kis téglalappal (9. ábra).

$$\Delta T = \Delta i \cdot r \cdot \Delta \lambda^* = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} \cdot \Delta \varphi^* \cdot \rho \cdot \cos \varphi^* \cdot \Delta \lambda^*$$

Leképezett infinitezimális paralelogramma területe (10. ábra):

$$\begin{aligned} \Delta T' &= \text{alap} \cdot \text{magasság} = \Delta x \cdot \Delta y = \\ &= \rho \cdot \cos \varphi^* \cdot \Delta \lambda^* \cdot \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} \cdot \Delta \varphi^* \end{aligned}$$



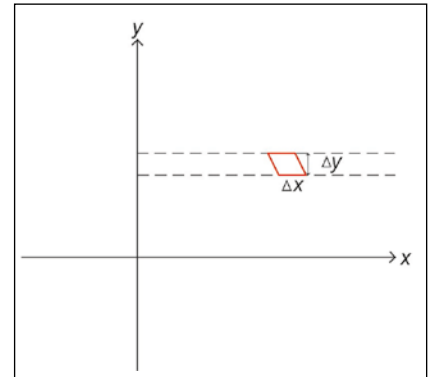
9. ábra. Elemi kis foktrapéz területe

Mivel az eredeti ΔT és $\Delta T'$ leképezett elemi felületek felszíne a szélességtől és hosszúságtól függetlenül megegyezik, ezért belátható, hogy a vetület területtartó.

Annak ellenére, hogy a vetületnek három tulajdonságát is sikerült megőrizni, a méridiánok szinuszos képének megtartása nem volt lehetséges az általánosítás során.

A vetület alkalmazása

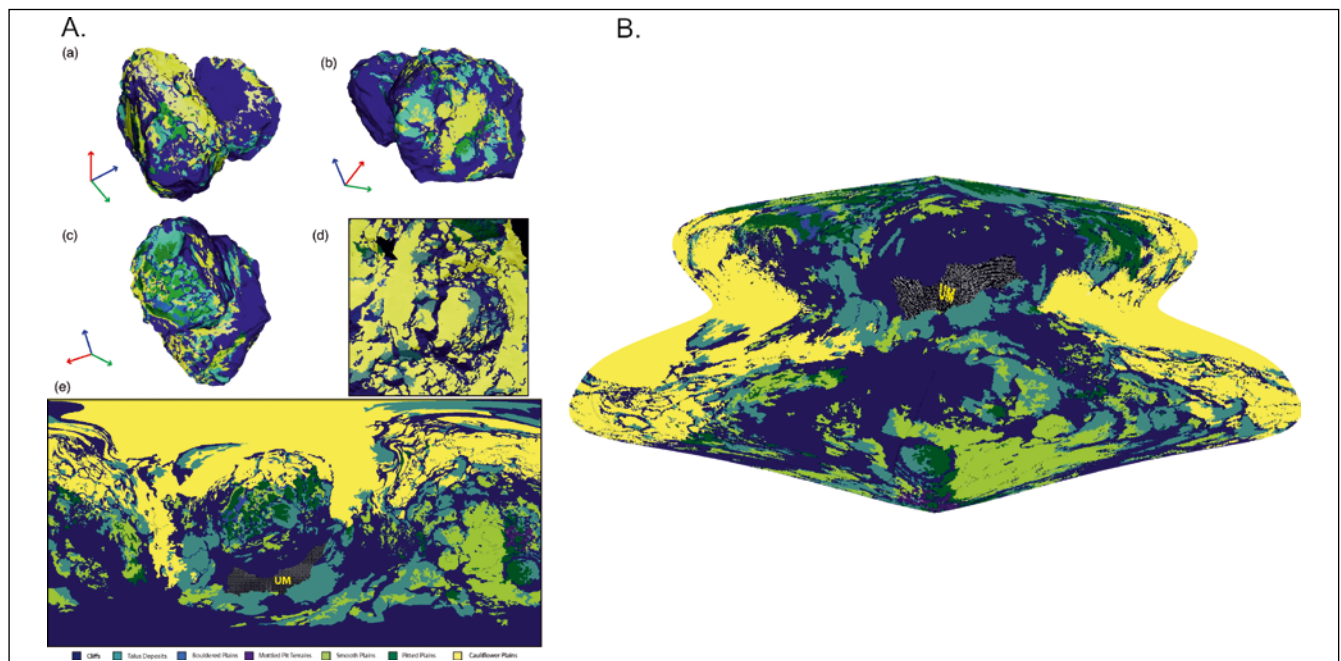
Az így kidolgozott vetület bemutatására egy az üstökösről készült geomorfológiai térképet (Birch et al. 2017) vetítettünk át (11. ábra). Az eredeti ábrához tartozó térkép (A. jelű) négyzetes



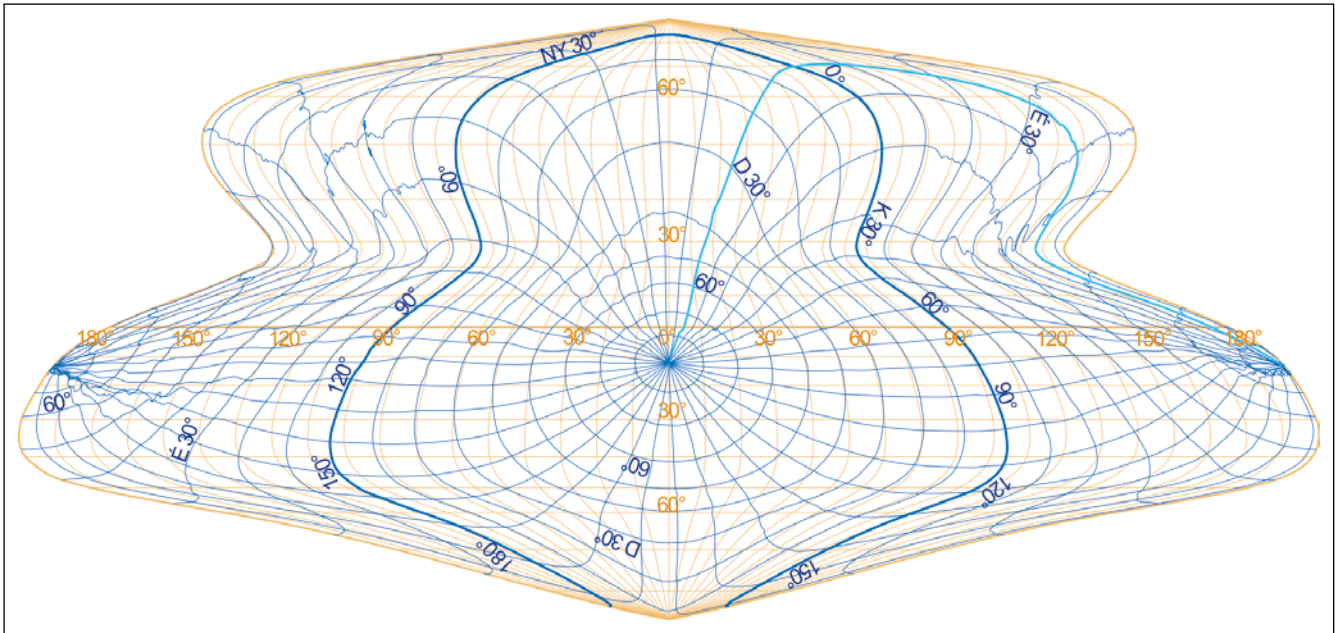
10. ábra. Elemi kis paralelogramma területe

hengervetületben készült, és az egyszerűbb értelmezhetőség érdekében mellékeltek hozzá különböző nézetből 3D-s perspektív ábrákat is. Ezen a térképen nem értelmezhetők egyértelműen az üstökösnek azon pontjai, amelyek az áthajlásoknál vannak. Az általunk meghatározott egzakt vetületi egyenlet segítségével egy olyan térképet hoztunk létre, amely egyértelműen meg tudja határozni a felszín pontjait a referencia rendszer alapján, valamint utal az üstökös amorf alakjára is (B hasáb).

Megrajzoltuk a fokhálózati képét is az új vetületben (12. ábra). Az ábrán látható, hogy a régi gömbi planetocentrikus fokháló (kék) átvetítésekor nem mindenhol simák a fokhálózati vonalak. Ennek az oka, hogy az üstökös amorf alakja miatt a gömb és a mi alapfelületünk közötti dátumtranszformáció az áthajlásoknál nem teljesen egyértelmű.



11. ábra. Geomorfológiai térkép A) négyzetes hengervetületben, perspektív ábrákkal, B) az általunk meghatározott új vetületben



12. ábra. Kék: az eredeti, gömbi planetocentrikus fókálózat átvétele az új rendszerbe, narancs: a szabálytalan forgástest alappfelületén értelmezett segédfókálózat 1:75 000 méretarányban

Eredmény

Az üstökös alappfelületének meghatározásával és a vetületi egyenletek felírásával elkészült az égitest síkba vetítése. Az általunk meghatározott módszerrel segítségével bármely forgástest alakú égitest térképi ábrázolása megvalósítható. Az alappfelület leírását úgy határoztuk meg, hogy egy segédszelvényhez egy vezérsugár tartozhat. Ez bizonyos mértékig kezelni tudja a felület áthajlásait, szemben a gömb alappfelülettel. Ennek a módszernek a segítségével egyetlen térképen tudjuk ábrázolni az amorf formájú égitesteket. Az így kapott térkép valamelyest emlékeztet az alappfelület alakjára is, szemben a korábban alkalmazott négyzetes hengervetülettel. A szakirodalmi kutatásaink alapján eddig senki nem alkalmazott még ilyen fajta ábrázolási módot a hasonló esetekben.

Irodalom

- Birch, S., Tang, Y., Hayes, A., Kirk, R., Bodewits, D., Campins, H., ... Vincent, J.-B. (2017). Geomorphology of comet 67P/Churyumov-Gerasimenko. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 469, old.: 50-67. DOI: 10.1093/mnras/stx1096
- Bugajevszkij, L. (1987). K voproszu o polucsenyij izometriczeszkij koordinat i ravnougolnoj cilindricseszkij projekcii trjohosznogo ellipszoida. *Geogyeztija i aerofotoszjomka*, 4, 79-90.
- ESA. (2019). Letöltés dátuma: 2019. június 24, forrás: <http://open.esa.int/rosetta-3d-model/>
- ESA. (2020. január 10). Forrás: <https://sci.esa.int/web/rosetta/-/55295-getting-to-know-rosetta-s-comet>
- Guliyev, R. (2019). On the orbital evolution and origin of comet 67P/Churyumov-Gerasimenko. In *Science Without Borders* (4. kötet, old.: 259). Innsbruck.
- Hargitai, H., Wang, J., Stooke, P., Karachetseva, I., Kereszturi, Á., & Gede, M. (2017). Map Projections in Planetary Cartography. In *Choosing a Map Projection* (old.: 177-202). Cham: Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-51835-0_7
- Kaczmarczyk, G. (é.n.). *Downhill Simplex method for many (~20) dimensions*. Institute of Theoretical Physics and Astrophysics. University of Gdansk: Wita Stwosza 57.
- Klinghammer, I. (2015). A kartográfia alapjairól: a térképvetületek kezdetei. *Geodézia és Kartográfia*, LXVII(7-8), 14-19. DOI: 10.30921/GK.67.2015.4.3
- Nelder, J., & Mead, R. (1965). A Simplex Method for Function Minimization. *The Computer Journal*, 7(4), old.: 308-313. DOI: 10.1093/comjnl/7.4.308
- Nircov, M., Flejsz, M., & Borisov, M. (2012). Kartografirovaniye aszteroida 433 Erosz v ravnopromezsutocsnih vdolj meridianov cilinricseszkij i azimutalnoj projekcijah trjohosznogo ellipszoida. *Geogyeztija i aerofotoszjomka*, 1, 54-61.
- Nircov, M., Flejsz, M., Borisov, M., & Stooke, P. (2014). Jacobi conformal projection of the triaxial ellipsoid: new projection for mapping of small celestial bodies. In *Cartography from Pole to Pole* (old.: 235-246). Berlin, Heidelberg: Springer. DOI: 10.1007/978-3-642-32618-9_17
- Nircov, M., Flejsz, M., Borisov, M., & Stooke, P. (2015). Equal-area projections of the triaxial ellipsoid: first time derivation and implementation of cylindrical and azimuthal projections for small solar system bodies. *The Cartographic Journal*, 52(2), old.: 114-124. DOI: 10.1080/00087041.2015.1119471
- Nircov, M., Flejsz, M., Nykolajeva, D., & Orendarczuk, A. (2018). Kartografirovaniye nyebesznih tyel szo szdvojennoj figuroj v projekcijah trjohosznogo ellipszoida na primere binarnogo jadra kometi 67P/Churyumov-Gerasimenko. *Geogyeztija i aerofotoszjomka*, 62(5), old.: 514-523. DOI: 10.30533/0536-101X-2018-62-5-514-523
- Shen, L., Farid, H., & McPeck, M. A. (2009). Modeling three-dimensional morphological structures using spherical harmonics. *Evolution: International Journal of Organic Evolution*, 63(4), 1003-1016. DOI: 10.1111/j.1558-5646.2008.00557.x



Takáts Tünde
MSc egyetemi
hallgató

ELTE Térképtudományi és
Geoinformatikai Tanszék
tunde.takats@gmail.com



**Dr. Kerkovits
Krisztián**
adjunktus

ELTE Térképtudományi és
Geoinformatikai Tanszék
kerkovits@map.elte.hu